

Relatório Técnico de Otimização

Burrito Game – Gurobi

Investigação Operacional II

Dinis Pinto – 8230619

Pedro Flores – 8240407

Rodrigo Oliveira – 8230131

Nuno Cruz – 8240330

8 de abril de 2026

Conteúdo

1	Introdução	4
1.1	Contextualização do Problema	4
2	Fase 1: Modelo Matemático Base	6
2.1	Conjuntos e Parâmetros	6
2.2	Variáveis de Decisão	6
2.3	Função Objetivo e Restrições	6
2.3.1	Função objetivo	6
2.3.2	Restrição que garante que um edifício é servido apenas por um caminhão:	7
2.3.3	Restrição que impede a venda de burritos em locais que não existam caminhões:	7
3	Fase 2: Frota Modular e Marketing	8
3.1	Novos Conjuntos e Parâmetros	8
3.2	Novas Variáveis de Decisão	8
3.3	Função Objetivo e Restrições (MINLP)	9
3.3.1	Função objetivo	9
3.3.2	Restrição de exclusividade de tipo de frota por localização i : .	9
3.3.3	Restrição de capacidade operacional do caminhão instalado: . . .	9
3.3.4	Restrição de orçamento disponível de marketing:	9
3.3.5	Restrição de volume mínimo de frota instalada (parâmetro opcional):	10
3.3.6	Restrição de distanciamento mínimo entre caminhões (parâmetro opcional):	10
4	Fase 3: Restrições Táticas e Estratégicas	11
4.1	Monopólio Zonal	11
4.2	Cobertura Geográfica Obrigatória	11
4.3	Exclusividade de Clientes	11
5	Resultados Computacionais e Simulação Visual	12
5.1	Cenário Fase 1 (Capacidade Infinita)	12
5.2	Cenário Fase 2 (Frota Modular e Marketing)	15
5.2.1	Alocação de Frota e Ativação de Marketing	15
5.3	Cenário Fase 3 (Restrições Táticas e Estratégicas)	18
5.3.1	Cobertura Geográfica, Monopólio e Conflito Contratual	18
6	Análise Comparativa e Evolução do Modelo	21

7	Desafios Computacionais e de Modelação	22
7.1	A Não-Linearidade da Procura e do Marketing	22
8	Conclusão	22

1 Introdução

Este relatório apresenta a formulação matemática do jogo Burrito Game da Gurobi. Encontra-se dividido em três fases, na primeira é feita a modelação do problema original, já na segunda e terceira fase, são feitas alterações ao problema, como adição de restrições, novas variáveis e outros. No final são apresentados os resultados de cada fase, considerando os parâmetros utilizados. O modelo foi resolvido em python, recorrendo ao gurobipy, obtendo a licença de estudantes, foi possível resolver o problema como sendo um problema não linear sem limite de tamanho.

1.1 Contextualização do Problema

O problema abordado neste trabalho, consiste no posicionamento de camiões de venda de burritos numa cidade. No caso particular deste trabalho, existem 15 edifícios com procura disponível para os burritos e 14 possíveis pontos para colocar camiões. Cada edifício possui um número máximo de procura, isto é, pessoas que vão até ao camião mais próximo comprar burritos, uma particularidade é que todas as pessoas de um mesmo edifício, irão comprar burritos ao mesmo camião. No total, o caso particular apresentado, tem uma procura total de 550 burritos vendidos em um dia.

A distribuição dos edifícios deste caso, mostra-se bastante concentrada, o que pode levar à não necessidade de posicionar muitos camiões. Os pontos vermelhos presentes no mapa, indicam quais edifícios estão com procura disponível neste caso.

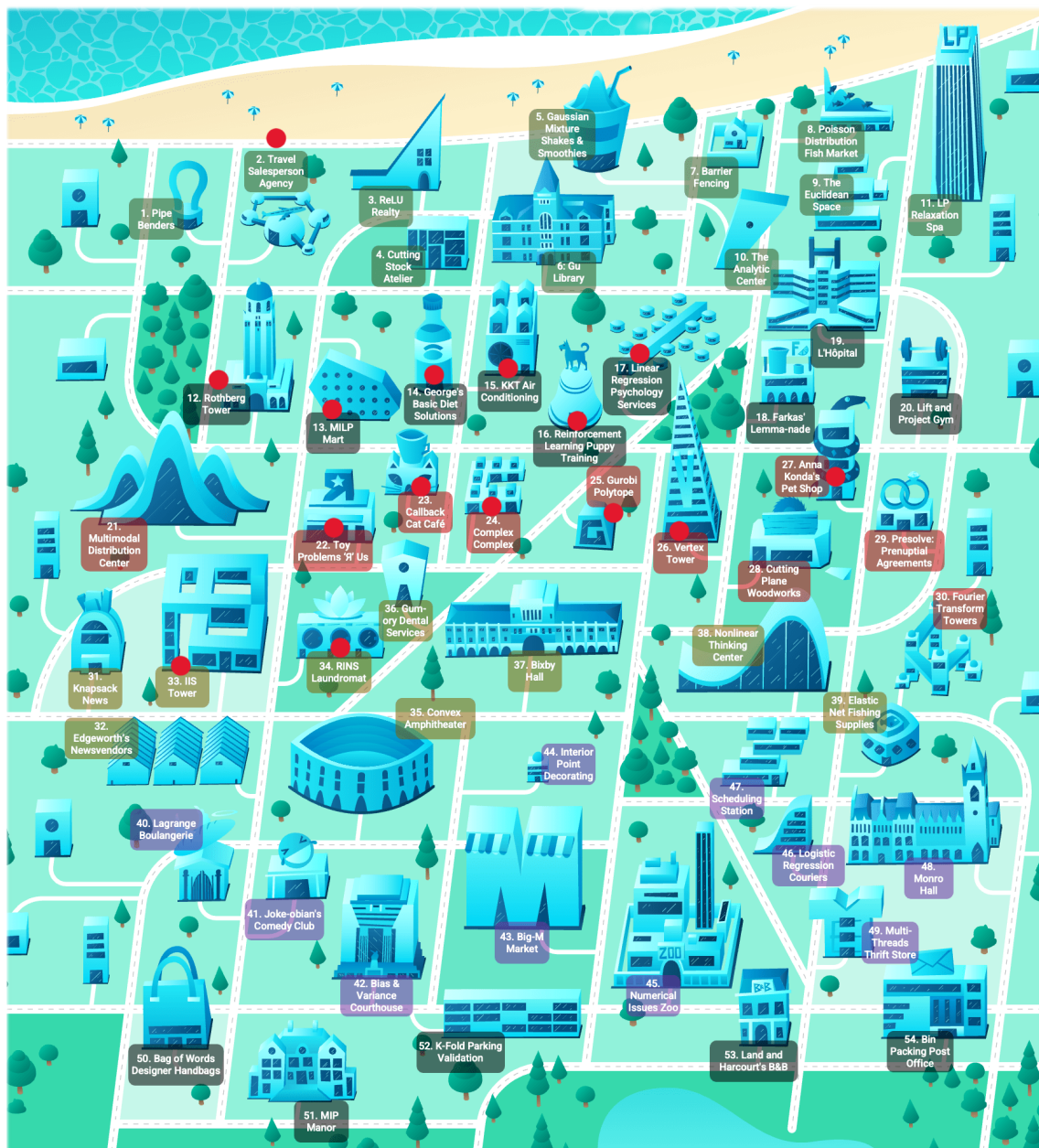


Figura 1: Mapa do jogo, com indicação dos edificios seleccionados no caso.

2 Fase 1: Modelo Matemático Base

2.1 Conjuntos e Parâmetros

- I : Conjunto de localizações candidatas, indexado por i (Exemplo prático: $i = 12$ refere-se à localização **truck53**, um dos camiões abertos na Fase 1, correspondente ao 12^o registo de dados).
- J : Conjunto de edifícios (procura), indexado por j (Exemplo prático: $j = 8$ refere-se ao edifício **demand18**, correspondente ao 8^o registo de dados).
- r : Preço unitário de venda (Exemplo: $r = 10\text{€}$, indicando que cada cliente paga 10€ por um burrito).
- k : Custo unitário de produção (Exemplo: $k = 5\text{€}$, referente ao custo dos ingredientes gastos num burrito).
- f : Custo fixo de instalação do camião (Exemplo: $f = 250\text{€}$ diários para alugar e operar o espaço na localização).
- a_{ij} : Procura base do edifício j se afetado à localização i (Exemplo: $a_{12,8} = 70$ significa que se o edifício **demand18** ($j = 8$) for servido pela localização **truck53** ($i = 12$), 70 clientes comprarão burritos).

2.2 Variáveis de Decisão

- $y_i \in \{0, 1\}$: 1 se for instalada frota na localização i , 0 caso contrário (Exemplo prático: $y_{12} = 1$ indica que o solver Gurobi decidiu otimizar o lucro abrindo um camião no **truck53** ($i = 12$), enquanto $y_5 = 0$ indica que rejeitou o **truck16** ($i = 5$)).
- $x_{ij} \in \{0, 1\}$: 1 se o edifício j for servido pela localização i , 0 caso contrário (Exemplo prático: $x_{12,8} = 1$ significa que a solução ótima alocou todos os clientes do edifício **demand18** ($j = 8$) para serem servidos pelo camião **truck53** ($i = 12$)).

2.3 Função Objetivo e Restrições

2.3.1 Função objetivo

$$\text{Max } L = \sum_{j \in J} \sum_{i \in I} (r - k) \cdot a_{ij} \cdot x_{ij} - \sum_{i \in I} f \cdot y_i \quad (1)$$

Justificação Analítica: A função objetivo reflete a formulação económica do problema. O primeiro termo calcula a margem de contribuição total (receita menos

custos variáveis) multiplicada pela procura que foi satisfeita. O segundo termo subtrai os custos fixos inerentes à abertura de um camião.

2.3.2 Restrição que garante que um edifício é servido apenas por um camião:

$$\sum_{i \in I} x_{ij} \leq 1 \quad \forall j \in J \quad (2)$$

Impacto e Exemplo dos Resultados: Para o edifício `demand18` ($j = 8$), a restrição impõe a soma $\sum_i x_{i,8} \leq 1$. Na Fase 1, o Gurobi definiu a variável $x_{12,8} = 1$ (alocando ao `truck53`). Consequentemente, para todas as outras localizações $i \neq 12$, as variáveis foram forçadas a 0 (por exemplo, $x_{3,8} = 0$ para o `truck8`). Desta forma, o modelo garante $1 \leq 1$.

2.3.3 Restrição que impede a venda de burritos em locais que não existam camiões:

$$x_{ij} \leq y_i \quad \forall i \in I, \forall j \in J \quad (3)$$

Impacto e Exemplo dos Resultados: O local `truck16` ($i = 5$) não foi aberto, logo a variável binária assumiu o valor $y_5 = 0$. A restrição impôs que $x_{5,j} \leq 0$. Como as variáveis de alocação são binárias ($x \in \{0, 1\}$), isto força matematicamente que $x_{5,j} = 0$ para qualquer edifício j . Se o Gurobi tentasse servir um cliente a partir deste camião fechado ($x_{5,j} = 1$), violaria a inequação ($1 \not\leq 0$).

3 Fase 2: Frota Modular e Marketing

Nesta fase, introduz-se a divisão da frota por tipo, restrições à capacidade da frota e uma nova variável de decisão. Agora irão ser estabelecidos limites ao número de burritos que cada camião pode vender, aproximando-se um pouco mais da realidade.

3.1 Novos Conjuntos e Parâmetros

- T : Conjunto de tipologias de frota (Pequeno, Médio, Grande), indexado por t (Exemplo prático: $t = \text{Grande}$ representa a tipologia escolhida pelo solver para todos os camiões ativos nesta fase).
- f_t : Custo fixo do camião do tipo t (Exemplo prático: $f_{\text{Grande}} = 400\text{€}$ diários, camião do tipo grande tem um custo fixo de instalação de 400€).
- Q_t : Capacidade máxima do camião do tipo t (Exemplo prático: $Q_{\text{Grande}} = 100$, significa que o camião do tipo Grande não pode vender mais de 100 burritos por dia).
- α : Fator fracionário de incremento de procura (Exemplo prático: $\alpha = 0.10$, o que significa que cada campanha de marketing aumenta a base de clientes do edifício em 10%).
- c_p : Custo unitário por ativação de campanha (Exemplo prático: $c_p = 20\text{€}$, cada campanha de marketing tem um custo de 20€).
- B : Orçamento global máximo para marketing (Exemplo prático: $B = 500\text{€}$, no máximo, só se pode gastar 500€ em marketing).
- P_{max} : Limite superior de campanhas admissíveis por edifício (Exemplo prático: $P_{max} = 3$, cada edifício pode no máximo levar com 3 campanhas de marketing).
- N_{min} : Número mínimo global de camiões na rede (Exemplo prático: $N_{min} = 4$, no mínimo devem ser aberto 4 camiões).
- D_{min} : Distância linear mínima entre camiões instalados (Exemplo prático: D_{100} , cada camião tem de estar distanciado de outro qualquer em pelo menos 100 metros).

3.2 Novas Variáveis de Decisão

A variável y_i desdobra-se para incluir a dimensão da tipologia (t). Introduce-se a variável inteira P_j :

- $y_{it} \in \{0, 1\}$: 1 se for instalado um caminhão do tipo t na localização i , 0 caso contrário (Exemplo prático: $y_{13, \text{Grande}} = 1$ significa a instalação de um caminhão Grande na localização $i = 13$, correspondente ao `truck44`).
- $P_j \in \{0, 1, \dots, P_{\max}\}$: Número de campanhas de marketing no edifício j (Exemplo prático: $P_{12} = 1$ significa 1 campanha ativada no edifício `demand22`, $j = 12$).

3.3 Função Objetivo e Restrições (MINLP)

3.3.1 Função objetivo

O modelo assume formato Não-Linear (MINLP) devido ao produto entre a variável de afetação e a de marketing ($x_{ij} \cdot P_j$):

$$\text{Max } L = \sum_{j \in J} \sum_{i \in I} (r - k) \cdot x_{ij} \cdot a_{ij} \cdot (1 + \alpha \cdot P_j) - \sum_{i \in I} \sum_{t \in T} f_t \cdot y_{it} - \sum_{j \in J} c_p \cdot P_j \quad (4)$$

Justificação Analítica: A quantidade vendida passa a ser flexível e dependente da decisão de alocação de marketing (P_j). O solver avalia se o aumento percentual justifica o custo da campanha (c_p).

3.3.2 Restrição de exclusividade de tipo de frota por localização i :

$$\sum_{t \in T} y_{it} \leq 1 \quad \forall i \in I \quad (5)$$

Exemplo dos resultados: Na localização `truck53` ($i = 12$), a restrição dita $y_{12,P} + y_{12,M} + y_{12,G} \leq 1$. Como o solver definiu a abertura de um caminhão Grande ($y_{12,G} = 1$), as outras tipologias foram forçadas matematicamente a zero ($y_{12,P} = 0$ e $y_{12,M} = 0$), garantindo a unicidade de tipo ($0 + 0 + 1 \leq 1$).

3.3.3 Restrição de capacidade operacional do caminhão instalado:

$$\sum_{j \in J} x_{ij} \cdot a_{ij} \cdot (1 + \alpha \cdot P_j) \leq \sum_{t \in T} Q_t \cdot y_{it} \quad \forall i \in I \quad (6)$$

Exemplo dos resultados: Para a localização `truck53` ($i = 12$), com a variável $y_{12,G} = 1$, o limite do lado direito assume o valor $Q_G \cdot 1 = 100$. A soma do lado esquerdo para todos os edifícios afetados a este caminhão totalizou exatamente 100. A inequação final avaliou-se como $100 \leq 100$, respeitando a capacidade de produção.

3.3.4 Restrição de orçamento disponível de marketing:

$$\sum_{j \in J} c_p \cdot P_j \leq B \quad (7)$$

Exemplo dos resultados: O Gurobi definiu as variáveis inteiras $P_8 = 1$ (demand18) e $P_{12} = 1$ (demand22), mantendo todos os outros $P_j = 0$. A restrição foi resolvida como $20 \cdot P_8 + 20 \cdot P_{12} = 40 \leq 500$, respeitando folgadamente o parâmetro global B .

3.3.5 Restrição de volume mínimo de frota instalada (parâmetro opcional):

$$\sum_{i \in I} \sum_{t \in T} y_{it} \geq N_{min} \quad (8)$$

Exemplo dos resultados: Sendo o parâmetro ativo $N_{min} = 4$, a restrição impôs $\sum y_{it} \geq 4$. O solver ativou quatro variáveis binárias: $y_{3,G} = 1$, $y_{5,G} = 1$, $y_{13,G} = 1$ e $y_{12,G} = 1$. A equação avaliou-se como $4 \geq 4$.

3.3.6 Restrição de distanciamento mínimo entre caminhões (parâmetro opcional):

$$\sum_{t \in T} y_{it} + \sum_{t \in T} y_{i't} \leq 1 \quad \forall i, i' \in I \mid i \neq i' \wedge \text{dist}(i, i') < D_{min} \quad (9)$$

Exemplo Teórico: Se o D_{min} fosse violado por $i = 12$ e $i' = 13$, a inequação somaria as variáveis de ambos os nós. Se tentássemos abrir caminhões em ambos, teríamos $\sum y_{12,t} + \sum y_{13,t} = 1 + 1 = 2$, violando a condição $2 \not\leq 1$, forçando o Gurobi a fixar pelo menos um dos nós a 0.

4 Fase 3: Restrições Táticas e Estratégicas

As variáveis e a formulação base mantêm-se inalteradas em relação à Fase 2. São adicionadas três restrições espaciais e contratuais que limitam a liberdade do solver.

4.1 Monopólio Zonal

Restrição de exclusividade espacial para caminhões do tipo *Grande*. Se um caminhão *Grande* for aberto em i , proíbe-se a abertura de qualquer outro caminhão num raio D :

$$y_{i,\text{Grande}} + \sum_{t \in T} y_{i',t} \leq 1 \quad \forall i, i' \in I \mid i \neq i' \wedge \text{dist}(i, i') \leq D \quad (10)$$

Exemplo dos resultados: Como o `truck53` ($i = 12$) abriu como *Grande* na Fase 3 ($y_{12,G} = 1$), para qualquer localização i' num raio D , a inequação assume a forma $1 + \sum y_{i',t} \leq 1$. Isto obriga matematicamente a que $\sum y_{i',t} \leq 0$, garantindo que todas as variáveis y nas redondezas fiquem trancadas a 0.

4.2 Cobertura Geográfica Obrigatória

Divisão do plano em quatro quadrantes (Q_1, Q_2, Q_3, Q_4) via cálculo das médias cartesianas globais ($\bar{x}, \bar{y}$). Impõe-se um mínimo de um caminhão por quadrante:

$$\sum_{i \in Q_k} \sum_{t \in T} y_{it} \geq 1 \quad \forall k \in \{1, 2, 3, 4\} \quad (11)$$

Exemplo dos resultados: Para o quadrante 2 (Nordeste), a restrição avalia-se como $\sum_{i \in Q_2} \sum_t y_{it} \geq 1$. Para não violar esta regra, o Gurobi ativou a variável $y_{14,M} = 1$ (`truck56`), tornando a soma igual a 1 e assegurando presença geográfica.

4.3 Exclusividade de Clientes

Impede a afetação simultânea da operação a dois edifícios concorrentes específicos (j_1 e j_2):

$$\sum_{i \in I} x_{i,j_1} + \sum_{i \in I} x_{i,j_2} \leq 1 \quad (12)$$

Exemplo dos resultados: Esta regra foi aplicada opondo o `demand1` ($j_1 = 1$) e o `demand18` ($j_2 = 8$). A restrição foi processada como $\sum_i x_{i,1} + \sum_i x_{i,8} \leq 1$. O solver analisou a rede e atribuiu o valor $x_{3,1} = 1$ (servindo o `demand1` a partir do $i = 3$). Consequentemente, a equação $(1 + \sum_i x_{i,8} \leq 1)$ forçou todas as variáveis $x_{i,8}$ relativas ao `demand18` a assumirem estritamente o valor 0, formalizando o seu abandono estratégico.

5 Resultados Computacionais e Simulação Visual

O modelo foi elaborado e resolvido, recorrendo à interface de Python do *Gurobi*. Para não ser uma visualização puramente numérica, o grupo desenvolveu adicionalmente um ambiente de simulação e *Dashboard* interativo.

5.1 Cenário Fase 1 (Capacidade Infinita)

Parâmetros de Instância: $r = 10$ €, $k = 5$ €, $f = 250$ €.

- **Lucro Ótimo:** 1.435,00 €
- **Faturação Bruta:** 3.870,00 € | **Custo Ingredientes:** -1.935,00 € | **Custo Frota:** -500,00 €
- **Frota Instalada (2 camiões):**
 - **truck53** ($y_{12} = 1$): Afetação de 11 edifícios (302 burritos vendidos).
 - **truck8** ($y_3 = 1$): Afetação de 3 edifícios (85 burritos vendidos).
- **Volume Total de Operação:** 387 unidades servidas.

Análise do Impacto: Como antecipado, na ausência de limites, temos apenas 2 camiões, já que as localizações se encontram todas bastante perto e cada camião pode vender tudo o que aparecer de procura.

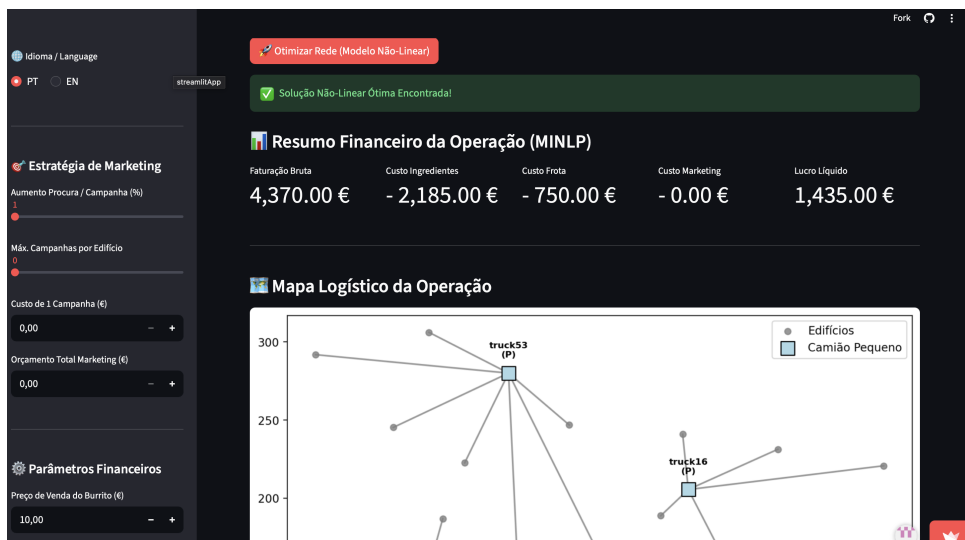


Figura 2: Resultados relativos à Fase 1.

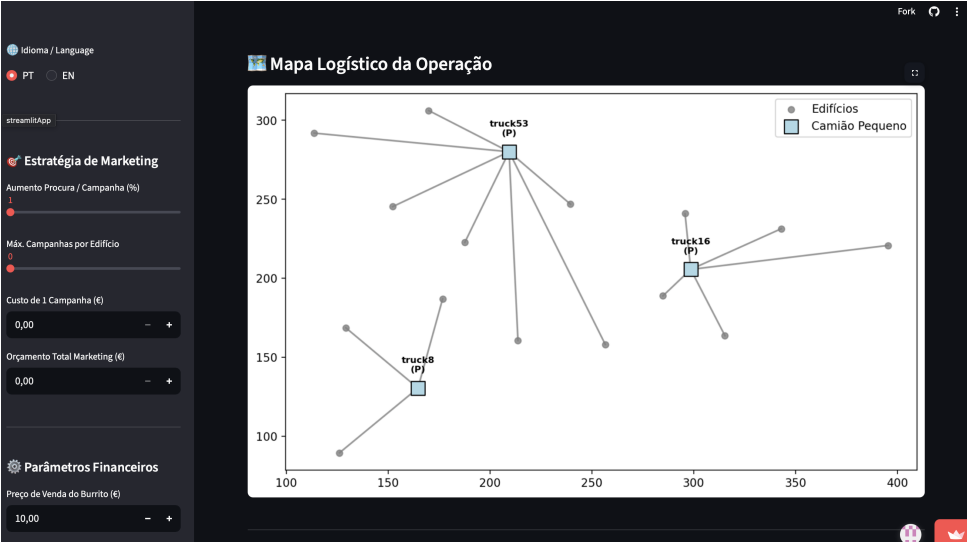
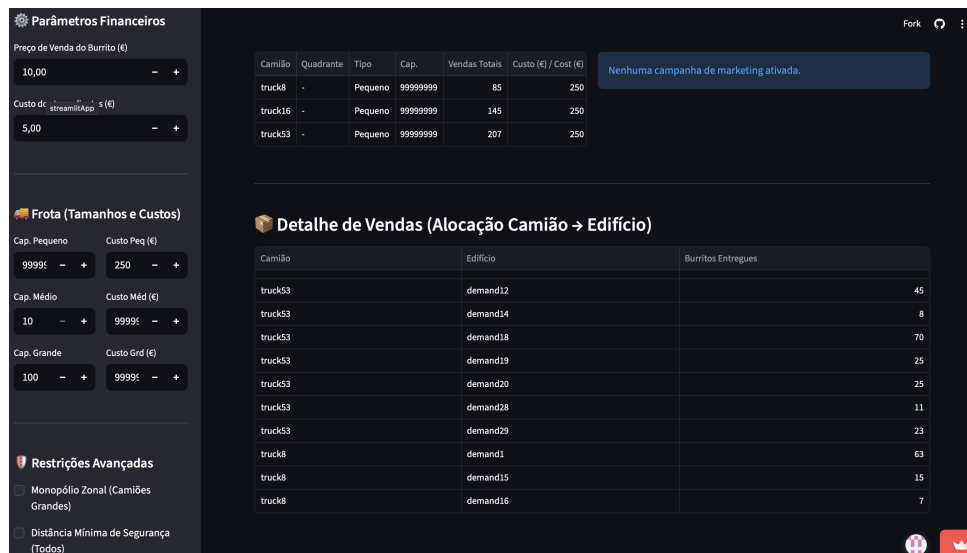


Figura 3: Resultados relativos à Fase 1.



Figura 4: Resultados relativos à Fase 1.



5.2 Cenário Fase 2 (Frota Modular e Marketing)

Parâmetros de Instância: $f_t \in \{150, 250, 400\} \text{ €}$, $Q_t \in \{25, 50, 100\}$, $\alpha = 0.10$, $c_p = 20 \text{ €}$, $B = 500 \text{ €}$, $P_{max} = 3$. *Restrições operacionais de distância (D_{min}) e volume mínimo (N_{min}) inativas.*

- **Lucro Ótimo:** 342,00 € | **Faturação Bruta:** 3.964,00 €
- **Custo Ingredientes:** -1.982,00 € | **Custo Frota:** -1.600,00 € | **Custo Marketing:** -40,00 €

5.2.1 Alocação de Frota e Ativação de Marketing

Otimização com recurso exclusivo à tipologia *Grande*:

- **truck8** ($y_{3,G} = 1$): 99 vendas (Ocupação: 99%)
- **truck16** ($y_{5,G} = 1$): 99 vendas (Ocupação: 99%)
- **truck44** ($y_{13,G} = 1$): 98 vendas (Ocupação: 98%)
- **truck53** ($y_{12,G} = 1$): 100 vendas (Ocupação: 100%)

O modelo ativou 1 campanha no **demand18** ($P_8 = 1$) e 1 campanha no **demand22** ($P_{12} = 1$).

Análise do Impacto: A introdução de limites obriga à expansão da frota (passando de 2 para 4 camiões), o que reduz o lucro para 342,00 €. Já no marketing o solver só ativou duas campanhas para garantir que as carrinhas ficavam com 98% a 100% de ocupação.



Figura 6: Resultados relativos à Fase 2.

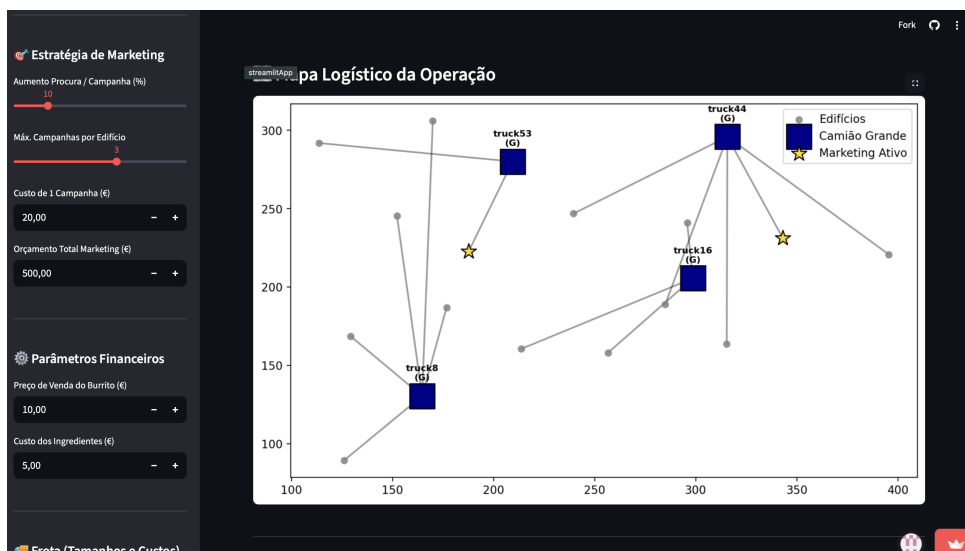


Figura 7: Resultados relativos à Fase 2.



Figura 8: Resultados relativos à Fase 2.



Figura 9: Resultados relativos à Fase 2.

5.3 Cenário Fase 3 (Restrições Táticas e Estratégicas)

Parâmetros de Instância: $D = 150$ m, $j_1 = \text{demand1}$ ($j_1 = 1$), $j_2 = \text{demand18}$ ($j_2 = 8$).

- **Lucro Ótimo:** 170,00 € | **Faturação Bruta:** 2.940,00 €
- **Custo Ingredientes:** -1.470,00 € | **Custo Frota:** -1.300,00 € | **Custo Marketing:** 0,00 €

5.3.1 Cobertura Geográfica, Monopólio e Conflito Contratual

- **Q1 (Noroeste):** truck53 ($y_{12,G} = 1$) | 99 vendas (Ocupação: 99%)
- **Q2 (Nordeste):** truck56 ($y_{14,M} = 1$) | 46 vendas (Ocupação: 92%)
- **Q3 (Sudoeste):** truck8 ($y_{3,G} = 1$) | 100 vendas (Ocupação: 100%)
- **Q4 (Sudeste):** truck22 ($y_{7,M} = 1$) | 49 vendas (Ocupação: 98%)

Análise do Impacto: Com as novas restrições, a eficiência da frota cai drasticamente (lucro de 170,00 €). O solver abandona o **demand18** a favor do **demand1**, e opta por não ativar nenhuma campanha de marketing. Este resultado demonstra o impacto que restrições como a do Monopólio zonal e da distribuição mínima por quadrantes podem ter no resultado.



Figura 10: Resultados relativos à Fase 3.

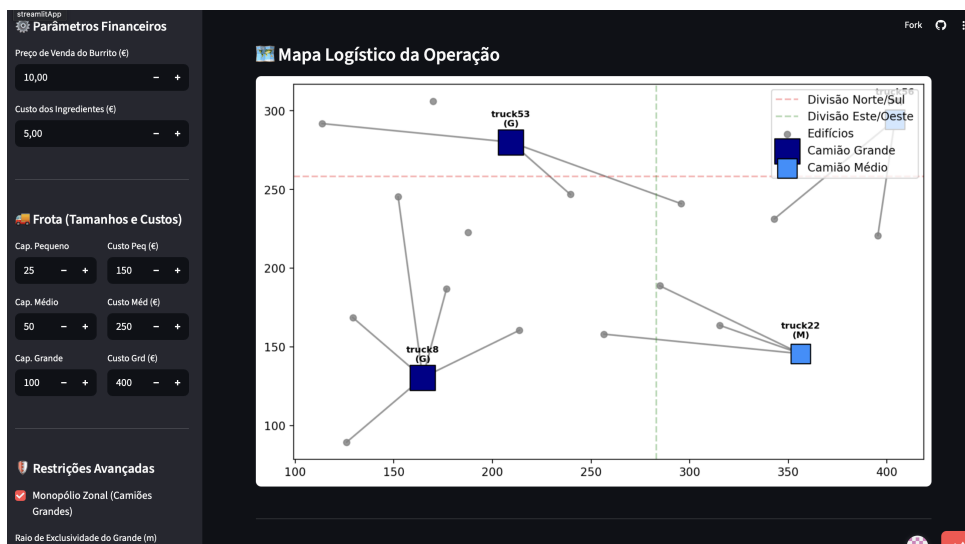


Figura 11: Resultados relativos à Fase 3.



Figura 12: Resultados relativos à Fase 3.



Figura 13: Resultados relativos à Fase 3.

6 Análise Comparativa e Evolução do Modelo

A seguinte tabela demonstra a diferença nos parâmetros financeiros entre todas as fases. Dela é possível retirar algumas conclusões.

Tabela 1: Comparação de Indicadores-Chave de Desempenho (KPIs) por Fase.

Métrica Analítica	Fase 1 (Base)	Fase 2 (Limites)	Fase 3 (Tática)
Lucro (€)	1.435,00	342,00	170,00
Faturação Bruta (€)	3.870,00	3.964,00	2.940,00
Custo Total Frota (€)	-500,00	-1.600,00	-1.300,00
Investimento MKT (€)	(N/A)	-40,00	0,00
Volume Total Servido (un.)	387	396	294
Frota Total Instalada (un.)	2	4	4
Ocupação Média Frota (%)	(Infinita)	99.0%	97.2%

A análise à Tabela 1 suporta conclusões valiosas sobre o impacto que novas restrições fazem ao modelo:

1. **A Ilusão da Faturação:** O aumento de faturação da Fase 1 para a Fase 2 (de 3.870 para 3.964 euros) traduziu-se, numa diminuição de 76% do Lucro. Este caso demonstra a grande diferença que a limitação no número de burritos que cada camião pode vender faz ao resultado final. Na fase 2, foi necessário duplicar o número de camiões para vender quase o mesmo.
2. **Impacto da dispersão:** Com a obrigação de dispersar no mínimo 4 camiões por toda a cidade, o lucro caiu ainda mais, dado que tiveram de ser abertos camiões que venderam com menos eficiência.

7 Desafios Computacionais e de Modelação

7.1 A Não-Linearidade da Procura e do Marketing

O principal desafio matemático apareceu na Fase 2, na formulação das vendas reais, existe na função objetivo a multiplicação entre duas variáveis, o que torna o modelo não linear. Na abordagem tradicional, o grupo teria de recorrer a complexas metodologias de linearização. A superação deste desafio foi alcançada ativando uma licença para estudantes do Gurobi, assim foi possível utilizar o mesmo sem qualquer restrição de tamanho e de não linearidade, já que ele atualmente tem a capacidade de resolver problemas deste tipo.

8 Conclusão

A diferença entre a Fase 1 e a Fase 3 demonstra a grande evolução que um modelo pode ter no que toca à representação da realidade, onde inicialmente é desenvolvido um modelo matemático muito simples e no final acabamos com um modelo, ainda simples no mundo da otimização, mas bastante mais complexo em comparação com o inicial.